Physicité

L'oscillateur harmonique (fiche)

1 Stabilité des équations différentielles

Pour des équations de la forme

$$\ddot{x} = f(x) \text{ ou } \dot{x} = f(x)$$

Propriété 1 : Positions d'équilibre

Une position d'équilibre est telle que $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$. C'est donc un point tel que :

$$f(x_{eq}) = 0$$

Un point d'équilibre est stable si et seulement si on y revient naturellement.

Propriété 2 : Stabilité

x_{eq} est une position d'équilibre stable si et seulement si f est décroissante au voisinage de x_{eq}

2 Comportement des sytèmes physiques au voisinage d'une position d'équilibre

DLs usuels :

Fonction	DL à l'ordre 1 en 0
e^x	$1 + x$
$\ln(1 + x)$	x
$(1 + x)^\alpha$	$1 + \alpha x$
$\cos(x)$	1
$\sin(x)$	x

Et à l'ordre 2 : $\cos(x) \underset{x \ll 1}{=} 1 - \frac{x^2}{2}$.

Méthode 1 : Calcul des DLs adimensionnés au voisinage de 0

On utilise les DLs usuels pour obtenir une somme de produits de fonctions linéarisées. Les DLs se composent, se multiplient et s'additionnent naturellement. Puisque l'on fait une linéarisation, on néglige tous les termes avec des puissances de x plus grandes que 1.

Méthode 2 : Méthode de calcul des DLs dimensionnés au voisinage d'un point quelconque

On fabrique un paramètre adimensionné $x_0 \ll 1$. On se ramène alors au cas des DLs adimensionnés au voisinage de 0.

Méthode 3 : Résoudre une équation différentielle linéaire à second membre constant

- Trouver la solution particulière x_p, c'est-à-dire la solution de la forme du membre de droite, c'est-à-dire constante. On résout donc pour $\ddot{x} = 0$.
- Trouver la solution x_h de l'équation homogène associée, c'est-à-dire celle où on ne garde que les termes en x.

  À la fin, $x = x_h + x_p$.
- Finalement, on trouve les constantes en utilisant les conditions initiales sur $x(t = 0)$ et $\dot{x}(t = 0)$.

Propriété 3 : Solutions de l'équation différentielle $\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0$

$$\begin{array}{ll} \ddot{x} - \omega^2 x = 0 & x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} = A' \cosh(\omega t) + B' \sinh(\omega t) \\ \ddot{x} + \omega^2 x = 0 & x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = A' \cos(\omega t + \phi) \end{array}$$

ω est la pulsation propre du système. La fréquence d'oscillation vaut $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ et la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. $\cosh'(x) = \sinh(x)$ et $\sinh'(x) = \cosh(x)$. $\cosh$ est paire, $\sinh$ est impaire, donc utiles quand les problèmes présentent des symétries. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Propriété 4 : Force de rappel d'un ressort

Un ressort exerce une force $\vec{F}$ en fonction de la longueur l :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_l \tag{1}$$

Avec $\vec{u}_l$ un vecteur unitaire (de norme 1) parallèle au ressort et orienté dans le sens d'augmentation de la longueur l. k est appelée la constante de raideur du ressort et l_0 est appelée la longueur à vide.

3 Énergie et oscillateur harmonique

Définition 1 : Énergie potentielle

$$E_p = -\int^x F(x)dx \tag{2}$$

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx} \tag{3}$$

Propriété 5 : Sens de la force

La force pointe dans la direction de diminution de l'énergie potentielle

$$E_{pp} = mgz$$
$$E_{pel} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

Méthode 4 : Équations différentielles quadratiques

Si on a une équation différentielle de la forme

$$\dot{x}^2 + V(x) = \text{cste} \tag{4}$$

Que l'on sait difficilement résoudre, il faut penser à dériver. C'est le passage entre le TEM et le PFD.

Propriété 6 : Équilibre et énergie

Un point d'équilibre est un extremum local de l'énergie potentielle.

Propriété 7 : Équilibre stable et énergie potentielle

Un point d'équilibre stable est un minimum local de l'énergie potentielle.

Propriété 8 : Équilibre instable et énergie potentielle

Un point d'équilibre instable est un maximum local de l'énergie potentielle.

Propriété 9 : Stabilité et énergie potentielle

Un point d'équilibre est stable si et seulement si $\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{eq}} \geqslant 0.$

4 Aller plus loin que l'oscillateur harmonique

4.1 Oscillateurs couplés

2 modes propres :

Mode symétrique : position de l'oscillateur 1 = position de l'oscillateur 2, pulsation ω_0 des oscillateurs découplés.

Mode antisymétrique : postion de l'oscillateur 2 = -position de l'oscillateur 1, pulsation $\omega_1 > \omega_0$.

Faible couplage, battements : Si l'oscillateur de couplage est de pulsation propre négligeable devant la pulsation des oscillateurs découplés, on a des battements de pulsation $\omega_1 - \omega_0$, et de pulsation de la porteuse ω_0.

4.2 Oscillateur harmonique amorti

Définition 2 : Forme canonique

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Q est le facteur de qualité. Plus il est grand, plus on est proche de l'oscillateur harmonique, moins l'amortissement est fort.

Régime apériodique, $Q \leqslant 1/2$

Régime pseudo-périodique $Q > 1/2$

$\Omega < \omega_0$, d'autant plus proche de ω_0 que Q est grand.

$Q \approx$ nombre d'oscillations visibles.

5 Systèmes d'équations différentielles linéaires

Méthode 5 : Systèmes d'équations différentielles linéaires à couplage symétrique

Dans le cas d'un système d'équations différentielles à couplage symétrique :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dx^2} = af + bg \\ \dfrac{d^2 g}{dx^2} = bf + ag \end{cases}$$

Poser $S = f + g$ et $D = f - g$. Les équations obtenues sur S et D sont alors découplées. Cette méthode fonctionne aussi si le système est d'ordre 1. La présence de constantes dans les équations ne doit pas changer la méthode, cela impliquera simplement des constantes dans les équations différentielles découplées, qui peuvent être traitées comme n'importe quelle équation avec second membre.

Méthode 6 : Systèmes d'équations différentielles linéaires à couplage anti-symétrique

Un système à couplage antisymétrique est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dx^2} = bg \\ \dfrac{d^2 g}{dx^2} = -bf \end{cases}$$

On pose alors $u = f + ig$. On obtient une équation différentielle sur u que l'on peut résoudre avec les méthodes vues plus haut. Cette méthode marche aussi pour les systèmes d'ordre 1.